A COMUNICAÇÃO E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO PADRÕES

Sílvia Afonso Moreira

Agrupamento Vertical de Escolas de Barroselas - EB/JI de Barroselas

samoreira@iol.pt

Lina Fonseca

ESE do Instituto Politécnico de Viana do Castelo

linafonseca@ese.ipvc.pt

Resumo

A investigação e os documentos curriculares orientadores para a Matemática estimulam e destacam os benefícios e a transversalidade da comunicação matemática e do estudo de padrões para a aprendizagem desta área de saber. No entanto, os alunos apresentam lacunas consideráveis ao nível da comunicação. Assim, esta investigação visou estudar a qualidade da comunicação matemática dos alunos quando se encontram a resolver problemas envolvendo padrões, em pequenos grupos, detectar dificuldades e possíveis formas de as superar, agregando estas duas linhas transversais do currículo.

1. Introdução

Para um grande número de investigadores, a comunicação matemática conquistou um lugar de eleição na matemática (National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Radford, 2006) ao considerar-se que a qualidade da comunicação influencia a qualidade do ensino e da aprendizagem (Chronaki & Christiansen, 2005; NCTM, 2000).

Em Portugal, a comunicação matemática é realçada em diferentes documentos (ME, 1991, 2001; ME/DGIDC, 2007) sendo que a comunicação é encarada como: um meio para atingir uma das duas finalidades fundamentais para o ensino da Matemática ao longo do Ensino Básico; um objectivo geral; uma capacidade transversal; e um objectivo curricular (ME/DGIDC, 2007). Porém, os resultados do Relatório Nacional de Provas de Aferição do Ensino Básico - 4.º, 6.º e 9.º anos - 2004 (ME/DGIDC, 2006), deixam claro que os alunos portugueses revelam bastantes dificuldades no âmbito da comunicação matemática ao longo do ensino básico. Igualmente, os professores observam na aula um fosso entre o processo de resolução, a comunicação oral e a comunicação escrita (Szetela, 1993). Tal sugere a existência de um desajuste susceptível de constituir um entrave ao desenvolvimento pleno da competência matemática, o que motivou esta investigação que visa estudar a qualidade da comunicação de alunos da escolaridade básica quando confrontados com a resolução de problemas envolvendo padrões. Este estudo é orientado pelas questões: 1) Como se organiza a comunicação estabelecida entre alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico quando se encontram a resolver, em pequenos grupos, problemas envolvendo padrões?; 2) Como se caracteriza a qualidade dessa comunicação?; 3) Que diferenças é possível detectar entre a linguagem utilizada durante a resolução, em pequenos grupos, de problemas envolvendo padrões e a utilizada para comunicar e justificar o resultado? Que razões podem motivar essas diferenças?; 4) Como se caracterizam as dificuldades dos alunos no âmbito da comunicação matemática? Que razões podem justificar essas dificuldades? Como se poderão superar as dificuldades detectadas?

2. Enquadramento Teórico

Comunicação Matemática

Numa perspectiva interacionista, o saber matemático que os alunos aprendem é decorrente das características da interacção e comunicação na qual participam. O significado de expressões é encontrado quando o aluno utiliza a nova linguagem e a integra no seu discurso (Wood & Lafayette, 2000). Para Jirotková e Littler (2003) uma boa comunicação sustenta a aprendizagem e o desenvolvimento do conhecimento matemático ao estabelecer ligações entre conhecimentos isolados do aluno. A investigação enuncia factores influentes na organização e qualidade da comunicação nomeadamente: o tempo (Martinho, 2004); a estrutura social e académica do grupo e dos elementos (Hunter, 2007; Martinho, 2004); a atenção e envolvimento activo dos participantes (Hunter, 2007). Civil (1998) menciona: a dinâmica de grupo, o uso da linguagem, a crença/confiança na matemática, a compreensão matemática, o papel do professor e a natureza das tarefas.

Para desenvolver a competência matemática, Pirie (1998) considera seis categorias de comunicação complementares: a linguagem natural; a linguagem matemática verbal (oral ou escrita); a linguagem simbólica; a representação visual; assumpções partilhadas, mas não explicitadas; e a linguagem quase matemática (utilização de linguagem separada da compreensão observando-se incorrecção na articulação de duas linguagens, mas que não afecta a compreensão matemática).

Falar e escrever são ferramentas importantes ao serviço da descoberta e reflexão em colaboração com os pares (Huinker & Laughlin, 1996). A linguagem oral é fundamental por servir de suporte ao pensamento e ao desenvolvimento da competência matemática (Ponte, Guerreiro, Cunha, Duarte, Martinho, Martins, *et al.*, 2007) podendo ser utilizada previamente como apoio à escrita. A escrita favorece a estruturação de conceitos e procedimentos através de uma reflexão mais cuidada promovendo a interacção (Huinker & Laughlin, 1996).

Civil (1998) propõe algumas justificações para falhas na comunicação nomeadamente: sendo uma consequência directa de factores influentes no processo; um conhecimento reduzido do tópico discutido; uma lacuna em actividades comunicativas; a crença que vocabulário específico e simbolismo tem de ser usado nas explicações; uma consequência da dinâmica do grupo. Por sua vez, Almiro (citado por Martinho, 2004), menciona: a falta de autonomia dos alunos; dificuldades na leitura e interpretação de textos; falta de confiança neles próprios e nos colegas; dificuldades em exprimir ideias e argumentar. Martinho (2004) refere ainda a resistência a actividades não rotineiras.

Os grupos de trabalho compostos por alunos podem assumir múltiplos padrões de interacção (Stacey & Gooding, 1998). Contudo, uma boa qualidade de comunicação no grupo pressupõe uma combinação de características individuais dos membros que origine uma heterogeneidade de competências do grupo em prol da partilha de conhecimentos e competências (Hunter, 2007). Para a existência de uma situação de interacção argumentativa construtiva, Jonhson e Jonhson (referidos por Rowe & Bicknell, 2004) defendem o desenvolvimento de competências colaborativas de: formação (competências básicas necessárias para o funcionamento do grupo); funcionamento (cada elemento assume uma função dentro do grupo); formulação (aplicação, explicação e análise de ideias); e produção (integração de ideias e formação de conceitos ou um princípio geral). Nestas circunstâncias, todos os participantes são convidados a participar e construir conjuntamente a aprendizagem.

Padrões

Tal como a comunicação, a exploração de padrões adquiriu um novo alento na educação matemática desde que se passou a valorizar o raciocínio mais do que o resultado (Win & Keuskamp, 2007). A investigação tem destacado os benefícios da exploração de padrões, nomeadamente: promovem a interacção e a comunicação entre os alunos (Alvarenga, 2006; Barbosa, 2007); são actividades encaradas como interessantes e desafiadoras (Alvarenga, 2006; Barbosa, 2007; Vale & Pimentel, 2005); promovem a experimentação, investigação, conjectura e prova (Vale & Pimentel, 2005); envolvem uma vasta gama de tópicos matemáticos (Zazkis & Liljedahl, 2002). O estudo de padrões promove o desenvolvimento de competências de medida, de geometria, de estatística, de probabilidades, de pensamento algébrico e de número (Buchanan, 2004; Vale & Pimentel, 2005), sendo que Win e Keuskamp (2007) salientam o papel determinante do estudo de padrões no desenvolvimento da numeracia. De acordo com Buchanan (2004) e Vale e Pimentel (2005), o estudo de padrões reveste-se de um carácter transversal à Matemática e ao currículo. Nos EUA, o NCTM (2000) recomenda a sua integração nos currículos desde o jardim-de-infância até ao secundário. Em Portugal, a exploração de padrões e regularidades é amplamente realçada em recentes propostas curriculares (ME, 2001; ME/DGIDC, 2007).

Padrões e generalização. Generalizar implica ver o que é *igual* e o que é *diferente* (Cooper & Warren, 2008). Lannin, Barker e Townsend (2006), fazendo referência a Kaput, mencionam que a generalização implica examinar atentamente quantidades variáveis e descrever relações existentes entre casos para uma situação particular. Radford (2008) definiu a generalização (aritmética) de um padrão como sendo a detecção de aspectos comuns que posteriormente vão ser generalizados a todos os termos da sequência através da formação de um conceito geral (*genus*). A generalização algébrica distingue-se da generalização aritmética e apoia-se nela pelo facto do conceito geral (*genus*) servir à construção de uma regra que estabelece uma expressão aplicável a todos os termos da sequência (*schema*), implicando assim uma alteração do foco de pensamento do número em si para as operações nos números e respectivas relações (Radford, 2008).

Lannin *et al.* (2006) destacam quatro estratégias para a generalização: explícita, proporcionalidade directa, "*chunking*" e recursiva. Stacey (1989) acrescenta ainda a estratégia de contagem através da qual os alunos totalizavam o número de elementos de um desenho. A opção das estratégias é influenciada por: factores sociais, cognitivos e relativos à tarefa, sendo de destacar a visualização pobre ou forte da tarefa, a sua estrutura matemática (linear, de crescimento ou de decrescimento), valores de entrada, nomeadamente, próximos, múltiplos de valores já conhecidos e valores distantes (Lannin *et al.,* 2006).

Rivera e Becker (2008) concluíram que alunos que revelam dificuldades na generalização começam o processo atendendo a padrões meramente numéricos sem utilizar esquemas geométricos não sendo capazes de estabelecer relação entre a representação visual e a regra. Solicitar aos alunos uma justificação para as suas respostas é uma forma de obrigar a olhar estruturalmente para os objectos matemáticos e tornar a sua compreensão explícita comunicando as suas razões (Naik, Banerjee, & Subramaniam, 2005). Radford (2006) e Rivera e Becker (2008) atribuem um papel importante à linguagem na elaboração de generalizações. Radford (2006) estipula subdivisões de generalização algébrica de acordo com o nível de justificação, distinguindo: factual (o indeterminado não é nomeado e a justificação fixa-se nas acções desenvolvidas nos números); contextual (os objectos gerais são nomeados através de uma descrição localizada e contextualizada); e simbólica (o objecto geral e as operações feitas com ele são expressas num sistema alfanumérico algébrico). À medida que os alunos se apropriam de estratégias numéricas para a generalização começam a privilegiá-las em detrimento de estratégias figurativas, influenciando as respectivas justificações para as quais Rivera e Becker (2008) assinalam quatro formas de justificação da generalização: por extensão da generalização (recorrendo a mais exemplos); uso de um caso genérico para mostrar a semelhança estrutural; projectando uma fórmula; utilizando uma tabela de valores. As duas últimas formas são utilizadas de forma inconsistente pelos alunos que generalizam numericamente, sem ter bases figurativas sólidas.

3. Opções Metodológicas

Foi efectuado um estudo de caso qualitativo. A recolha de dados foi realizada durante quatro meses com recurso a oito tarefas envolvendo padrões, propostas a uma turma do 6.º ano do 2.º Ciclo do Ensino Básico, organizada em pequenos grupos de trabalho, dos quais foram seleccionados três grupos para a observação: ADT, Trio Matemático e Detectives Matemáticos. Procedeu-se à observação participante e a registos áudio e vídeo dos trabalhos dos grupos. Foram recolhidos e analisados os documentos escritos dos alunos. Para efeitos desta comunicação, será apresentada apenas a tarefa 6 "Encruzilhadas" (NRICH, 2005) dado que este trabalho se baseia num estudo de maior dimensão (Moreira, 2008).

4. Os Grupos Perante a Tarefa "Encruzilhadas"[1]

Grupo Trio Matemático

O grupo resolveu todas as questões correctamente demonstrando falta de objectividade nas suas justificações.

Organização da comunicação. A comunicação estabelece-se entre todos os elementos, estando igualmente envolvidos no trabalho e no processo de decisão em busca de uma solução comum, sugerindo uma organização colaborativa da comunicação.

Qualidade da comunicação. Através de uma apreensão sequencial, o grupo utilizou uma estratégia organizada para encontrar todas as possibilidades com um determinado número de palhinhas ao mudá-las de um conjunto para outro ("Vais tirando daqui para pôr aqui. Depois tiras esta e acabou."). O aprofundamento da compreensão das figuras e do problema é progressivo e comum através do esclarecimento recíproco chegando a conclusões mais gerais.

Ricardo: somamos o máximo com o mínimo.

Filipa: ai, não.

Ricardo: sim. Somamos o máximo com o mínimo, ai não…

Filipa: espera aí. Para 7 palhinhas…

Ricardo: é 6. É um número a menos.

Filipa: é um número a menos do número de palhinhas. Tiramos um ao número de palhinhas. É o menor.

Ricardo: e o máximo é… aqui é…5 vezes 5… 25. 2500 máximo… Espera… aqui 3, 2 (figura 5). Temos de dividir por 2… o melhor possível… Já sei! Ouve, olha. 100. Dividimos por 2, dá 50. E fazemos 50 vezes 50, que aqui tem 50 palhinhas e aqui tem outras 50.

Prof.: como é, Ricardo?

Ricardo: *stora,* assim, por exemplo no 5. Temos que tentar dividir ao máximo mas em números inteiros. Metíamos 3 de um lado e 2 do outro. Era mais fácil e depois é só fazer a conta, não é?

[1] A resolução da tarefa escrita pelos grupos é apresentada em anexo.

Na última questão, o grupo alcança o nível de generalização algébrica e formula regras gerais para o cálculo do mínimo e máximo número de cruzamentos, justificando-as a nível contextual ("é um número a menos do número de palhinhas"; "divide-se o melhor possível o número de palhinhas […] e depois multiplica-se esses dois números"). Os alunos demonstraram ter apreendido discursivamente os padrões e revelaram competência para discutir a ideia central baseando o raciocínio numérico nas construções. A comunicação serviu a aprendizagem sendo de boa qualidade.

Diferenças de linguagem durante a resolução e para comunicar a resposta. Durante a oralidade utilizam diferentes categorias de comunicação matemática (linguagem natural, linguagem matemática verbal e representação visual) e recorrem a exemplos para justificar os raciocínios efectuados. No registo, verifica-se que, numa grande maioria das respostas, o grupo recorre à linguagem natural havendo o recurso pontual à representação visual e à linguagem verbal matemática e a estratégias numéricas na questão *5)*. As justificações são factuais nos diferentes registos e aludem a uma estratégia sistemática na manipulação do material embora, na oralidade, os alunos demonstraram um conhecimento mais rigoroso e exacto que não se reflecte na escrita e que acarreta falta de objectividade nas respostas.

Na resposta à questão *5)*, o grupo privilegiou a linguagem verbal matemática para expressar uma regra explícita algébrica para o cálculo do mínimo e máximos números de cruzamentos e para um qualquer número de palhinhas, projectando fórmulas cujas variáveis são identificadas contextualmente. Note-se a expressão "dividir o melhor possível" por ser uma observação ao facto de se tratar de um número ímpar. Relativamente à comunicação oral ocorrida durante a resolução, o grupo utilizou a linguagem matemática verbal e a linguagem natural para estruturar regras explícitas para as generalizações. A justificação é feita recorrendo a exemplos e à projecção de fórmulas. No caso da fórmula para calcular o número mínimo de cruzamentos a justificação da generalização é feita contextualmente ("é um número a menos do número de palhinhas"). No respeitante à fórmula para calcular o número máximo de cruzamentos, recorrem a exemplos justificando a generalização factualmente. Só para efeitos de registo é que o grupo projecta uma fórmula para a justificação identificando as variáveis a um nível contextual de generalização. Assim, nesta questão, observa-se um grau de correspondência elevado entre a comunicação oral e a comunicação escrita.

Dificuldades na comunicação. O grupo manifestou alguma dificuldade na interpretação e diferenciação das questões ("as perguntas parecem todas iguais. Quando acabamos uma aparece outra parecida") bem como na elaboração dos registos. À excepção das questões *1)* e *5)*, as justificações estão desadequadas ou incompletas relativamente ao pretendido. Os alunos mostraram hesitações na estruturação de respostas verbais sugerindo dificuldade no uso da linguagem escrita, facto assumido em diferentes momentos ("pois fazer foi fácil, agora a parte mais difícil é explicar").

Grupo Detectives Matemáticos

O grupo respondeu a todas as questões correctamente demonstrando dificuldade em justificar as respostas.

Organização da comunicação. O Fábio dominou a comunicação e tomou as decisões do grupo. Todos participaram espontaneamente na leitura das questões. O registo obedeceu a uma distribuição rígida das questões pelos alunos. A comunicação organizou-se em função de um líder.

Qualidade da comunicação. Para comunicar, o grupo recorre fortemente à representação visual utilizada complementarmente com a linguagem corrente e a linguagem matemática. Desde a análise das primeiras figuras, o Fábio propõe uma expressão numérica para o cálculo do número de cruzamentos que justifica recorrendo à contagem.

> Fábio: há 6 cruzamentos.
>
> Tiago: não, não.
>
> Fábio: 3 vezes 2.
>
> Tiago: 6?
>
> Fábio: olha, um está aqui, outro está aqui, outro está aqui, outro está aqui, outro está aqui. Quantos é que são?
>
> Rui: 6
>
> Fábio: 2 vezes 3 dá 6.

A regra foi apreendida, mas utilizada como mera estratégia aritmética de cálculo aplicada às construções efectuadas ("12. Ora 1, 2, 3, 4. E 1, 2, 3. 4 vezes 3, 12."). A generalização a nível algébrico surge relativamente à alínea 5.

> Tiago: o mínimo… tiramos um. E o máximo é…
>
> Fábio: o máximo é pôr mais ou menos 4, 4.
>
> Rui: pois. 4 vezes 4 dá 16.
>
> Inv.: e porquê o 4?
>
> Rui: porque é a metade.

O grupo generalizou e estruturou regras gerais, mas revelou fraca competência para a troca de ideias matemáticas e a discussão da ideia central de forma autónoma, tendo sido necessária a intervenção da investigadora. A estratégia principal para a resolução das alíneas fixou-se na construção das figuras e respectivos procedimentos ("Tiramos das filas para pôr nas colunas").

Diferenças de linguagem durante a resolução e para comunicar a resposta. Durante a resolução, o grupo utiliza recorrentemente diferentes categorias de comunicação matemática (representação visual, linguagem natural e linguagem matemática) e diferentes processos para a resolução e justificação, nomeadamente investigações empíricas, recurso a propriedades e, por fim, a formulação de regras aritméticas e algébricas. Na maioria dos registos, as justificações aludem à construção das figuras e à estratégia usada para variar o número de cruzamentos através da deslocação de palhinhas de um conjunto para outro. A representação visual só é utilizada na alínea *2a)* sendo pouco relevante face à questão. Embora desde as primeiras questões os alunos tenham enunciado uma regra para o cálculo do número de cruzamentos, esse conhecimento apenas foi explicitamente referido na última questão que revela mais compreensão do problema. Relativamente ao cálculo do número mínimo de cruzamentos, o grupo registou uma regra explícita algébrica, justificada com a projecção de uma fórmula geral recorrendo à linguagem matemática verbal baseando-se no trabalho oral que se socorreu também da representação visual, da linguagem natural e de exemplos. Relativamente ao número máximo de cruzamentos, na oralidade, o grupo estruturou uma regra explícita para a generalização algébrica, justificando-a com a projecção de uma fórmula e recorrendo a exemplos. A justificação é dada a nível factual ("é 16. 4 vezes 4 dá 16") e a nível contextual ("tiramos metade das filas… para pôr nas colunas") aludindo à representação. No registo, observa-se uma combinação da linguagem natural pouco clara quanto à terminologia ("tirar metade das filas") com uma linguagem matemática aplicada num exemplo ilustrativo. Assim, o registo fundamenta-se na comunicação oral que é mais exacta e rigorosa.

Dificuldades na comunicação. O grupo revelou dificuldade em abstrair-se da representação visual e enveredar por estratégias numéricas para a resolução das questões, embora tenham sido enunciadas propostas que careciam de uma reflexão nas relações dos números, o que só foi superado com auxílio da investigadora. As propostas partiam essencialmente do líder e sem justificações revelando dificuldades do grupo em exprimir e argumentar. Nos registos, observa-se desadequação e falta de objectividade face às questões, não reflectindo o conhecimento mobilizado durante a resolução.

5. Análise dos dados

No quadro seguinte pode-se observar a evolução dos grupos ao longo da intervenção pedagógica, recorrendo apenas a algumas tarefas, distribuídas ao longo da recolha de dados.

		Tar 1	*Tar 3*	*Tar 6*	*Tar 8*
ADT	*Organização*	Com líder	Com líder	Em par	Em par
	Qualidade	Fraca	Fraca	Razoável	Razoável
	Diferenças	A	A	A	A/B
	Dificuldades	A/B	A/B	A/B	B
Trio Matemático	*Organização*	Colaborativo	Colaborativo	Colaborativo	Colaborativo
	Qualidade	Razoável	Boa	Boa	Boa
	Diferenças	B	A	A/B	A/B
	Dificuldades	B	B	B	B
Detectives Matemáticos	*Organização*	Com líder	Com líder	Com líder	Em par
	Qualidade	Razoável	Razoável	Razoável	Boa
	Diferenças	A/B	A	A	B
	Dificuldades	A/B	A/B	B	B

Legenda: Diferenças: A- comunicação oral mais rica e geral, B- Correspondência entre a comunicação oral e escrita; Dificuldades: A- Dificuldades sociais ou decorrentes da tarefa, B- dificuldades cognitivas/matemáticas.

Quadro Nº 1 - Quadro-síntese do estudo.

Da análise do quadro, conclui-se que:

(a) houve uma evolução positiva dos grupos nos diferentes tópicos de análise ao longo da intervenção pedagógica, o que sugere que intervenções pedagógicas desta natureza podem contribuir para uma melhoria no desempenho dos alunos;

(b) as mudanças na qualidade da comunicação de dois grupos decorreram simultaneamente com uma mudança na organização da comunicação, o que leva a conjecturar que uma organização colaborativa pode contribuir para uma melhoria da qualidade de comunicação;

(c) a última tarefa apresenta níveis de qualidade superior nos três grupos e nos diferentes parâmetros apontando para uma apropriação dos grupos de competências de comunicação oral e escrita, e domínio em tarefas matemáticas envolvendo padrões.

Os dados sugerem que uma mudança na organização da comunicação em grupos com líder afecta positivamente a qualidade da comunicação oral, podendo promover progressos na aproximação da comunicação escrita à comunicação estabelecida durante a resolução.

6. Conclusões

A comunicação organiza-se em função dos alunos que mais contribuem para a resolução dos problemas - os líderes. Cada grupo apresenta uma dinâmica interna distinta, mas os grupos têm em comum o facto de valorizar uma distribuição justa e equilibrada do trabalho pelos elementos constituintes, tal como refere Stacey e Gooding (1998).

A qualidade da comunicação é influenciada: (a) pela organização da comunicação, observando-se uma melhoria da qualidade da comunicação a par com uma alteração da organização mais participada dos alunos, o que confirma Civil (1998), Martinho (2004) e Stacey e Gooding (1998); (b) pelas competências colaborativas manifestadas pelos grupos, observando-se uma melhoria da comunicação em função das primeiras, o que é consistente com Martinho (2004) e Jonhson e Jonhson (citados por Rowe & Bicknell, 2004) relativamente ao papel fundamental das competências colaborativas na implementação de uma situação de interacção argumentativa construtiva; (c) pela compreensão matemática e o conhecimento do tópico, tal como refere Civil (1998), visto que dificultam a formulação de propostas e justificações, e respectivas avaliações; e (d) pelo tempo, o que é consistente com Martinho (2004) e Ponte *et al.* (2007) ao induzir numa resolução precipitada. Em situações de impasse e dificuldade, os grupos demonstraram melhor desempenho comunicativo perante uma orientação de reflexão, por parte do professor, nos aspectos centrais do problema, através do questionamento, sendo este aspecto consistente com Civil (1998), Martinho (2004), Ponte *et al.* (2007) e Rowe e Bicknell (2004).

Observaram-se diferenças entre a comunicação estabelecida durante a resolução do problema e a comunicação escrita. A oralidade é mais rica, geral, consistente e resistente do que o seu registo, pela diversidade e complementaridade de categorias de comunicação utilizadas, pelas estratégias de generalização abordadas e respectivas formas e níveis de justificação. A linguagem verbal é maioritariamente utilizada no registo de respostas, suscitando por vezes dificuldade dada a sua formalidade. A escrita apoia-se fortemente na comunicação oral estabelecida durante a resolução, o que confirma as ideias de Huinker e Laughlin (1996) mas, por norma, não reflecte a sua qualidade observando-se um retrocesso nas estratégias e formas de justificação para níveis menos gerais e de mais fácil comunicação. Na escrita, as combinações de linguagem são pouco frequentes e, por vezes, desarticuladas. A representação visual é pouco utilizada pelos alunos para o registo, sugerindo uma desvalorização dos aspectos figurativos e visuais para a justificação em favor dos aspectos numéricos, embora seja um recurso muito utilizado durante a resolução, observando-se em alguns casos dificuldade dos grupos em abstraírem-se da exploração empírica para optar por estratégias numéricas, nomeadamente generalizações aritméticas e algébricas, sendo nessas circunstâncias necessária uma orientação da reflexão nas relações entre os números. Note-se que nenhum dos grupos utilizou uma justificação da generalização de base numérica com tabela de valores ~~e~~ tendo revelado alguma dificuldade em fazê-lo com a projecção de uma fórmula, confirmando as ideias de Rivera e Becker (2008), quando afirmam que os alunos utilizam inconsistentemente estas formas de justificação quando o conhecimento estrutural da figura não é sólido.

Os dados apontam para a existência de dificuldades comuns aos grupos de observação, nomeadamente: (a) na análise estrutural das figuras; (b) na formulação de uma regra explícita para a generalização; e (c) na elaboração de respostas escritas. Os grupos com qualidade de comunicação fraca/razoável apresentaram ainda dificuldades: (d) em exprimir e argumentar ideias; (e) em estabelecer interacções positivas e harmoniosas, ou seja, lacunas ao nível das competências de formação e funcionamento; e (f) na proposta, análise, crítica, avaliação e integração de ideias, isto é, ao nível das competências de formulação e produção. Os dados recolhidos no âmbito desta investigação apontam, como ponto comum aos três grupos de observação, para uma diminuição progressiva das dificuldades ao longo da intervenção pedagógica. Assim, a superação das dificuldades diagnosticadas no âmbito da comunicação durante a resolução de problemas envolvendo padrões passam por: (a) estimular o desenvolvimento de competências colaborativas colocando os alunos em situações de resolução de problemas em pequenos grupos; (b) promover actividades e estratégias que possibilitem aos alunos exprimir e argumentar oralmente; (c) incrementar situações de comunicação escrita diversificadas; (d) implementar regularmente actividades geométricas favorecendo a análise e apreensão de propriedades e relações; (e) fomentar a resolução de problemas envolvendo padrões desenvolvendo a aptidão para a generalização; (f) promover a comunicação na sala de aula, por parte do professor, participando como um modelo na comunicação, orientando e reforçando os padrões de interacção válidos focando a atenção dos alunos nos aspectos matemáticos importantes; e (g) contribuir para uma mudança na consciência dos alunos, valorizando o processo e a aprendizagem em detrimento do resultado e da tarefa.

7. Bibliografia

Alvarenga, D. (2006). A exploração de padrões como parte da experiência matemática de alunos do 2.º Ciclo. (Tese de Mestrado). Braga: Universidade do Minho.

Barbosa, E. (2007). A exploração de padrões num contexto de tarefas de investigação com alunos do 8.º ano de escolaridade. (Tese de Mestrado). Évora: Universidade de Évora.

Buchanan, M. (2004). Pattern power. [*on-line*]. Consultado em 4 de Janeiro de 2008: http://nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=2148&part=index&nomenu=0

Chronaki, A, & Christiansen, I. (2005). Challenging perspectives on mathematics classroom communication: from representations to contexts, interactions, and politics. Em A. Chronaki & I. Christiansen (Eds.), Challenging perspectives on mathematics classroom communication (pp. 3-45). Greenwich: Information Age Publishing.

Civil, M. (1998). Mathematical Communication through Small-Group Discussion. Em H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi e A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication* (pp. 207- 222). Reston: NCTM.

Cooper, T., & Warren, E. (2008). The effect of different representations on years 3 to 5 student's ability to generalise. *ZDM Mathematics Education*, 40, 23-37.

Huinker, D; Laughlin, C. (1996). Talk your way into writing. Em P. Elliott & M. Kenney (Eds.), *Communication in mathematics k-12 and Beyond - Yearbook 1996,* (pp. 81-88). Reston, Virginia: NCTM.

Hunter, R. (2007). Scaffolding small group interactions. Em J. Watson~~,~~ & K. Beswick (Eds.), Proceedings of the *30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia: Vol. 2. Mathematics: Essential research, essential practice*, (pp.430-439). Hobart, Austrália: MERGA.

Jirotková, D., & Littler, G (2003). Insight into pupil's structures of mathematical thinking through oral communication. Proceedings of Conference of European Research in Mathematics Education III, Bellaria, Italy. Consultado em 26 de Março de 2008:

http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG3/TG3_Jirotkova_cerme3.pdf

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 3-28.

Martinho, H. (2004). A comunicação na sala de aula de matemática: contributos para o desenvolvimento profissional do professor. (Relato de trabalho de Doutoramento na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa). [on-line]. Consultado a 23 de Maio de 2007 em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/HM-Projecto.pdf

Ministério da Educação (1991). Programa de Matemática - Plano de organização do Ensino-Aprendizagem, vol. II. Ensino Básico 2.º Ciclo. Lisboa: ME-DGEBS.

Ministério da Educação (2001). Currículo Nacional para o Ensino Básico. Competências essenciais. Lisboa: ME-DEB.

Ministério da Educação/ Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Consultado em 23 de Junho de 2008: http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/Programa Matematica.pdf

Ministério da Educação/Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (2006). Relatório Nacional de Provas de Aferição do Ensino Básico - 4.º, 6.º e 9.º anos - 2004. Consultado em 24 de Julho de 2007: http://www.portugal.gov.pt/NR/rdonlyres/42A38E37-3F9C-42F1-8FEC-BB18BF F167E6/0/Provas_Afericao_2004.pdf

Moreira, S. (2008). A comunicação matemática desenvolvida por alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico quando resolvem problemas envolvendo padrões. (Tese de Mestrado). Braga: Universidade do Minho.

Naik, S., Banerjee, R. & Subramaniam, K. (2005). Undestanding student's reasoning while comparing expressions. Em P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, A. Roche (Eds.), Proceedings of the *Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australásia: Vol 1. Building Connections: Theory, research and practice* (pp. 569-576). Sydney: MERGA.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.

NRICH - Enriching Mathematics (2005, Junho). Crossing. Universidade de Cambridge. Consultado em 12 de Dezembro de 2007, de http://nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=2792

Pirie, S. (1998). Crossing the gulf between thought and symbol: language as (slippery) stepping-stones. Em H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi e A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication in the mathematics classroom*, (pp. 7-29). Reston: NCTM.

Ponte, J.P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., et al. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 20(2), 39-74.

Radford, L. (2006). Communication, apprentissage et formation du je communautaire. Em B. D'Amore e S. Sbaragli (Eds.), Proceedings of the *20th National Italian Conference - Incontri con la Matemática*, 3(5), 65-72.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 83-96.

Rivera, F. D., & Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM - The Internacional Journal on Mathematics Education*, 40(1), 65-82.

Rowe, K. & Bicknell, B. (2004). Structured peer interactions to enhance learning in mathematics. Em I. Putt, R. Faragher, e M. McLean (Eds.), Proceedings of the *27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group os Australasia - Mathematics education for the third millenium, towards 2010*, (pp. 464-500). Melbourne: MERGA.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics,* 20(2), pp. 147-164.

Stacey, K., & Gooding, A. (1998). Communication and learning in small-group discussions. Em H. Steinbring, M.G. Bartolini Bussi, e A. Sierpinska (Eds), *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (pp. 191- 206). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Szetela, W. (1993). Facilitating communication for assessing critical thinking in problem solving. Em National Council of Teachers of Mathematics, *Assessment in the mathematical classroom* (pp. 143-151). Reston, Virginia: NCTM.

Vale, I. & Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. Em *Educação e Matemática*, 85, 14-21.

Win, T. & Keuskamp, D. (2007). Communicating concepts of academic numeracy through a pattern-based approach. *Journal of Academic Language & Learning*, 1(1), 100-112.

Wood, T. & Lafayette, W. (2000). Difference in teaching and opportunities for learning in primary mathematics classes. *ZDM - International Journal of Mathematics Education*, 32 (5), 149-153.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379-402.

Anexo

Resolução – "Trio Matemático"

Encruzilhadas

Leiam atentamente o enunciado do problema. Resolvam as questões com calma **justificando sempre** as respostas dadas com cálculos, desenhos, tabelas ou por palavras.

Caso sintam necessidade, podem utilizar palhinhas para auxiliar a resolução do problema.

Observem as figuras abaixo, ambas constituídas por dois conjuntos de palhinhas paralelas que se cruzam.

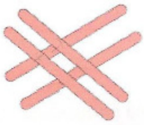


Figura 1

4

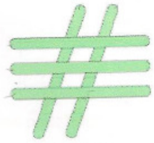


Figura 2

6

1- Na figura 1, observam-se quatro palhinhas que formam entre si quatro cruzamentos.

Quantos cruzamentos existem na figura 2?

R: Na figura ~~6~~ 2, existem 6 cruzamentos.

2 a)- Se se mantiverem dois conjuntos de palhinhas paralelas, mas desta vez com sete palhinhas no total, consegues reorganizá-las de modo a obter um número diferente de cruzamentos? Justifiquem a resposta.

R: Sim, nós conseguimos reorganizá-las alternando o lugar das palhinhas (horizontal e vertical).

2 b)- Qual é o número mínimo de cruzamentos que conseguem fazer? Justifiquem a resposta.

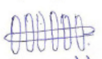
R: O número mínimo de cruzamentos que conseguimos fazer é 6, porque se colocar-mos 6 palhinhas na vertical, e 1 na horizontal o nº de cruzamentos é 6.

2 c) - Qual é o número máximo de cruzamentos possíveis com as sete palhinhas? Justifiquem a resposta.

R: O número máximo de cruzamentos que conseguimos fazer é 12, porque se colocarmos 4 palhinhas na vertical, e 3 na horizontal, o nº de cruzamentos é 12.

2d) - Conseguem encontrar todos os números possíveis de cruzamentos utilizando sete palhinhas? Justifiquem a resposta.

R: Conseguimos encontrar os cruzamentos 6, 10, 12.



6 cruzamentos

10 cruzamentos

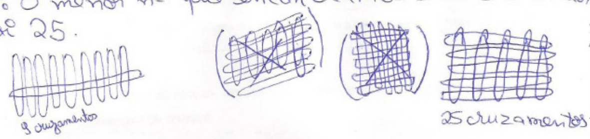
12 cruzamentos

2e) - O que necessitam fazer para provar que descobriram as possibilidades todas ou como podem mostrar que as têm todas? Expliquem o raciocínio.

R: Para provarmos que conseguimos descobrir as possibilidades, tiramos ~~uma~~ palhinhas da vertical e acrescentamos na horizontal.

3- Conseguem encontrar o menor e o maior número de cruzamentos para dez palhinhas? Expliquem como pensaram.

R: O menor nº que encontramos é 9 e o maior foi 25.

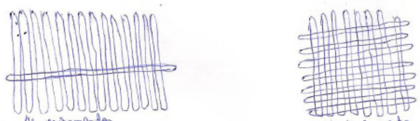


9 cruzamentos

25 cruzamentos

4- Conseguem encontrar o menor e o maior número de cruzamentos para quinze palhinhas? Expliquem como pensaram.

R: O menor nº é 14 e o maior é 56.



14 cruzamentos

56 cruzamentos

5- Qual o número mínimo e máximo de cruzamentos para qualquer número de palhinhas? Expliquem como pensaram.

mínimo - tiramos 1 ao número de palhinhas.

máximo - Tenta-se dividir o melhor possível, o nº de palhinhas e depois multiplicar esses dois números.

Resolução – "Detectives Matemáticos"

Encruzilhadas

Leiam atentamente o enunciado do problema. Resolvam as questões com calma **justificando sempre** as respostas dadas com cálculos, desenhos, tabelas ou por palavras.

Caso sintam necessidade, podem utilizar palhinhas para auxiliar a resolução do problema.

Observem as figuras abaixo, ambas constituídas por dois conjuntos de palhinhas paralelas que se cruzam.

Figura 1

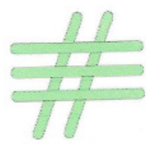


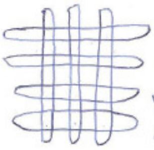
Figura 2

1- Na figura 1, observam-se quatro palhinhas que formam entre si quatro cruzamentos.

Quantos cruzamentos existem na figura 2?

Na figura 2 existe 6 cruzamentos, porque 3x2=6.

2 a)- Se se mantiverem dois conjuntos de palhinhas paralelas, mas desta vez com sete palhinhas no total, consegues reorganizá-las de modo a obter um número diferente de cruzamentos? Justifiquem a resposta.



R: É possível jogar 1 entre as duas figuras diferentes números de cruzamentos, porque nós tirámos uma palhinha das filas e metemos no sítio das colunas.

2 b)- Qual é o número mínimo de cruzamentos que conseguem fazer? Justifiquem a resposta.

O número mínimo de cruzamentos são 6, porque tirámos uma palhinha das colunas e metemos nas filas.

2 c) - Qual é o número máximo de cruzamentos possíveis com as sete palhinhas? Justifiquem a resposta.

O número máximo de cruzamentos são 12, porque tirámos uma palhinha das filas e metemos nas colunas

2d) - Conseguem encontrar todos os números possíveis de cruzamentos utilizando sete palhinhas? Justifiquem a resposta.

Os números possíveis de cruzamentos são 6; 10 e 12

2e) - O que necessitam fazer para provar que descobriram as possibilidades todas ou como podem mostrar que as têm todas? Expliquem o raciocínio.

Tirámos ~~[illegible]~~ da vertical e metemos na horizontal assim sucessivamente até as filas da vertical esgotarem.

3- Conseguem encontrar o menor e o maior número de cruzamentos para dez palhinhas? Expliquem como pensaram.

Sim conseguimos*

O menor número de cruzamentos são 9.

O maior número de cruzamentos são 25.

* Porque nós tiramos na vertical e pusemos na horizontal.

4- Conseguem encontrar o menor e o maior número de cruzamentos para quinze palhinhas? Expliquem como pensaram.

Sim conseguimos*

O menor número de cruzamentos são: 14.

O maior número de cruzamentos são: 56

* Porque nós tiramos na vertical e pusemos na horizontal

5- Qual o número mínimo e máximo de cruzamentos para qualquer número de palhinhas? Expliquem como pensaram.

Para calcular o mínimo tirámos 1 ao número total.

Para calcular o máximo tirámos metade das filas para pôr nas colunas

ex: 100 palhas 50×50=2500 cruzamentos.